最后一卷

《数学（理工农医类）》

高中起点升本、专科

一、选择题（本大题共 17 小题，每小题 5 分，共 85 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1.设函数$f(x)=(x+1)2^x$，则$f(2)=$（）

A.12
B.6
C.4
D.2

2.使$\log_2 a>\log_3 27$成立的a的取值范围是（）

A.$(0,+\infty)$
B.$(3,+\infty)$
C.$(9,+\infty)$
D.$(8,+\infty)$

3.设函数$f(x)=x^4+(m+3)x^3+4$是偶函数，则$m=$（）

A.4
B.3
C.-3
D.-4

4.设两个正数a,b满足$a+b=20$，则ab的最大值为（）

A.100
B.400
C.50
D.200

5.设甲：函数$y=kx+b$的图像过点$(1,1)$，乙：$k+b=1$，则（）
A.甲是乙的充分必要条件
B.甲是乙的必要条件，但不是乙的充分条件
C.甲是乙的充分条件，但不是乙的必要条件
D.甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

6.若等比数列$\{a_n\}$的公比为$3,a_4=9$，则$a_1=$（）

A.27
B.$\frac{1}{9}$
C.$\frac{1}{3}$
D.3

7.已知点$A(1,1),B(2,1),C(-2,3)$，则过点A及线段BC中点的直线方程为（）

A.$x-y+2=0$
B.$x+y-2=0$
C.$x+y+2=0$

D. $x-y=0$

8. $\log_5 10-\log_5 2=$（）

A. 8
B. 0
C. 1
D. 5

9. 设集合 $A=\{x\mid x^2=1\},B=\{x\mid x^3=1\}$，则 $A\cap B=$（）

A. $\varnothing$

B. $\{1\}$

C. $\{-1\}$

D. $\{1,-1\}$

10. 将一颗骰子掷 2 次，则 2 次得到的点数之和为 3 的概率是（）

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{6}$

11. 下列不等式成立的是（）

A. $\log_2 5>\log_2 3$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^5>\left(\frac{1}{2}\right)^3$

C. $5^{-\frac{1}{2}}>3^{-\frac{1}{2}}$

D. $\log_{\frac{1}{2}}5>\log_{\frac{1}{2}}3$

12. 设函数 $y=\sin 2x\cos 2x$ 的最小正周期是（）

A. 6π

B. 2π

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}$

13. 已知 $z_1=1+2\mathrm{i},z_2=3-4\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=$（）

A. $11+2i$
B. $11-2i$
C. $-5+2i$
D. $-5-2i$

14. 已知球的表面积为64π，则此球的体积为（）

A. 64π
B. $\frac{128}{3}\pi$
C. $\frac{64}{3}\pi$
D. $\frac{256}{3}\pi$

15. 已知圆$x^2+y^2+4x-8y+11=0$,经过点$P(1,0)$作该圆的切线，切点为Q，则线段PQ的长为（）
A. 10
B. 4
C. 16
D. 8

16. 已知平面向量$\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,则两向量的夹角为（）

A. $\frac{\pi}{3}$
B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{2}$
D. $\frac{\pi}{4}$

17. 一箱子中有 5 个相同的球，分别标以号码 1，2，3，4，5. 从中一次任取 2 个球，则这 2 个球的号码都大于 2 的概率为（）

A. $\frac{3}{5}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{2}{5}$
D. $\frac{3}{10}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

18. 不等式$|x-1|<1$的解集为__________.

19. 若二次函数$y=f(x)$的图像过点$(0,0)$,$(-1,1)$和$(-2,0)$，则$f(x)=$__________.

20. 曲线 $y = x^2 + 3x + 4$ 在点 $(-1, 2)$ 处的切线方程为__________.

21. 某块小麦试验田近 5 年产量（单位：kg）分别为

$$63 \quad a+1 \quad 50 \quad a \quad 70$$

已知这 5 年的年平均产量为 58kg，则 $a =$_________.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 49 分。解答应写出推理、演算步骤。）

22. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，$AC = 3$，$A = 60°$，求 AB，BC.

23. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1a_2a_3 = 27$.

(Ⅰ)求 a_2；

(Ⅱ)若 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 13$，求 $\{a_n\}$ 的前 5 项和.

24. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ 在 $x = 1$ 处取得极值-1，求

(Ⅰ) a，b；

(Ⅱ) $f(x)$ 的单调区间，并指出 $f(x)$ 在各个单调区间的单调性.

25. 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，直线 l 过 F_1 且斜率为 $\frac{3}{4}$，$A(x_0, y_0)(y_0 > 0)$ 为 l 和 E 的交点，$AF_2 \perp F_1F_2$.

(Ⅰ)求 E 的离心率；

(Ⅱ)若 E 的焦距为 2，求其方程.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】A

【解析】$f(2) = (2+1) \times 2^2 = 12$.

2. 【答案】D

【解析】$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$，即 $\log_2 a > 3 = \log_2 2^3$，而 $\log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数，故 $a > 2^3 = 8$，因此 a 的取值范围为 $(8, +\infty)$.

3. 【答案】C

【解析】$f(x)$ 为偶函数，故 $f(-x) = f(x)$，因此 $(-x)^4 + (m+3)(-x)^3 + 4 = x^4 + (m+3)x^3 + 4 \Rightarrow 2(m+3)x^3 = 0 \Rightarrow m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$.

4. 【答案】A

【解析】因为 $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$，所以 $ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{400}{4} = 100$.

5. 【答案】A

【解析】函数 $y = kx + b$ 的图像过点 $(1,1) \Rightarrow k + b = 1$；$k + b = 1$，当 $x = 1$ 时，$y = k + b = 1$，即

函数$y=kx+b$的图像过(1,1)点,故甲是乙的充分必要条件.

6.【答案】C

【解析】由题意知,$q=3$,$a_4=a_1q^3$,即$3^3a_1=9$,$a_1=\frac{1}{3}$.

7.【答案】B

【解析】线段BC的中点坐标为$\left(\frac{-2+2}{2},\frac{1+3}{2}\right)$,即(0,2),则过(1,1),(0,2)点的直线方程为$\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-1}{0-1}\Rightarrow x+y-2=0$.

8.【答案】C

【解析】$\log_5 10-\log_5 2=\log_5\frac{10}{2}=1$.

9.【答案】B

【解析】$A=\{x\mid x^2=1\}=\{-1,1\}$,$B=\{x\mid x^3=1\}=\{1\}$,故$A\cap B=\{1\}$.

10.【答案】B

【解析】一颗骰子掷2次,可能得到的点数的组合共有$C_6^1C_6^1=36$种,点数之和为3的组合有2种,故所求概率为$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

11.【答案】A

【解析】由对数函数图像的性质可知A项正确.

12.【答案】C

【解析】$y=\sin2x\cos2x=\frac{1}{2}\times2\sin2x\cos2x=\frac{1}{2}\sin4x$,故$y$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

13.【答案】A

【解析】$z_1z_2=(1+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}+6\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2=3+2\mathrm{i}+8=11+2\mathrm{i}$.

14.【答案】D

【解析】设球的半径为R,则其表面积为$4\pi R^2=64\pi,R=4$.所以球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{256}{3}\pi$.

15.【答案】B

【解析】$x^2+y^2+4x-8y+11=0\Rightarrow(x+2)^2+(y-4)^2=9$.则$P$点距圆心的长度为$\sqrt{(1+2)^2+(0-4)^2}=5$,故$PQ=\sqrt{5^2-9}=4$.

16.【答案】C

【解析】$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

17.【答案】D

【解析】任取 2 球，其号码均大于 2 的概率 $=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$.

二、填空题

18.【答案】$\{x\mid 0<x<2\}$

【解析】$|x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$，故不等式 $|x-1|<1$ 的解集为 $\{x\mid 0<x<2\}$.

19.【答案】$-x^2-2x$

【解析】设 $f(x)=ax^2+bx+c$，由于 $f(x)$ 过 $(0,0)$，$(-1,1)$，$(-2,0)$ 点，故有

$$\begin{cases} c=0 \\ a-b+c=1 \\ 4a-2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2, \\ c=0 \end{cases}$$

故 $f(x)=-x^2-2x$.

20.【答案】$y=x+3$

【解析】$y=x^2+3x+4 \Rightarrow y'=2x+3$，$y'|_{x=-1}=1$，故曲线在点 $(-1,2)$ 处的切线方程为 $y-2=x+1$，即 $y=x+3$.

21.【答案】53

【解析】近 5 年试验田的年平均产量为 $\frac{63+a+1+50+a+70}{5}=58 \Rightarrow a=53$.

三、解答题

22.【答案】

由已知得 $\frac{1}{2}\times 3\times AB\cdot\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$，

所以 $AB=4$.

由余弦定理得

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+AC^2-2\times AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ \\ &= 16+9-2\times 4\times 3\times\frac{1}{2} \\ &= 13, \end{aligned}$$

$BC=\sqrt{13}$.

23.【答案】

（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_1a_3=a_2^2$，又 $a_1a_2a_3=27$，可得 $a_2^3=27$，所以 $a_2=3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）和已知得 $\begin{cases} a_1+a_3=10 \\ a_1a_3=9 \end{cases}$.

解得 $a_1=1$ 或 $a_1=9$. 由 $a_2=3$ 得 $\begin{cases} a_1=9 \\ q=\frac{1}{3} \end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases} a_1=1 \\ q=3 \end{cases}$.

所以 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=\frac{1\times(1-3^5)}{1-3}=121$.

24.【答案】

（Ⅰ）$f'(x)=3x^2+2ax$. 由题设知

$$\begin{cases}3+2a=0,\\1+a+b=-1,\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

$f'(x)=3x^2-3x$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0, x_2=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

即 $f(x)$ 的单调区间为 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$，并且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$ 上为增函数，在 $(0,1)$ 上为减函数.

25.【答案】

（Ⅰ）由题设知 $\triangle AF_1F_2$ 为直角三角形，且 $\tan\angle AF_1F_2=\frac{3}{4}$. 设焦距 $|F_1F_2|=2c$，则

$|AF_2|=\frac{3}{2}c$，$|AF_1|=\frac{5}{2}c$，

$2a=|AF_1|+|AF_2|=4c$.

所以离心率

$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{2c}=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）若 $2c=2$，则 $c=1$，且 $a=2$，

$b^2=a^2-c^2=3$，

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.